ძვირფასო სტუდენტებო,
დავალების შესრულების დაწყებამდე,
გთხოვთ, ჯერ გაეცნოთ განმარტებით წერილს

მათემატიკა ეკონომიკისა და ბიზნესისათვის 2

დავალება № 24. ორი ცვლადის ფუნქციის ექსტრემუმი

ქვემოთ მოყვანილ ცხრილში მოცემული სავარჯიშოები აღებულია სილაბუსში მითითებული [2] სალექციო კურსიდან, კერძოდ, ლექცია 23-ის ბოლო პუნქტში მოყვანილი სავარჯიშოებიდან. გამუქებულია იმ ტიპური სავარჯიშოების ნომრები, რომელთა ამოხსნები გადმოცემულია აქ. გაეცანით ამ ამოხსნებს, დანარჩენი სავარჯიშოები კი შეასრულეთ დამოუკიდებლად.

სავარჯიშოების პირობები და პასუხები იხილეთ [2]-ში.

სავარჯიშოები №

1-ა,გ,ე,ზ,ი	1-ბ,დ,ვ,თ,კ	2-ა,გ	2-ბ,დ,ვ	3-ა,გ	3-ბ,დ	4	5	6	7-ა,გ, ე,ზ	7-ბ,დ,ვ,თ	8
9											

ტიპური სავარჯიშოების ამოხსნა

1. **იპოვეთ მოცემული ფუნქციების პირველი რიგის კერძო წარმოებულები:**

1-ა) $f(x,y) = 7x - 3y + 4$
ამოხსნა: f_x -ის საპოვნელად y ცვლადი ჩავთვალოთ მუდმივად და მოცემული ფუნქცია გავაწარმოოთ x ცვლადით, გვექნება $f_x(x,y) = 7$. ანალოგიურად, f_y -ის საპოვნელად x ცვლადი ჩავთვალოთ მუდმივად და მოცემული ფუნქცია გავაწარმოოთ y -ით, მივიღებთ $f_y(x,y) = -3$.
პასუხი: $f_x(x,y) = 7$, $f_y(x,y) = -3$.

1-გ) $f(x,y) = 4x^3 - 3x^2y + 5x$
ამოხსნა: წინა მაგალითის ამოხსნის მსგავსად f_x -ის საპოვნელად y ცვლადი ჩავთვალოთ მუდმივად და მოცემული ფუნქცია გავაწარმოოთ x ცვლადით. $f_x(x,y) = 12x^2 - 6xy + 5$, ასევე $f_y(x,y) = -3x^2$.
პასუხი: $f_x(x,y) = 12x^2 - 6xy + 5$; $f_y(x,y) = -3x^2$.

1-ე) $z = (3x + 2y)^5$
ამოხსნა: $\frac{\partial z}{\partial x}$ -ის საპოვნელად y ცვლადი ჩავთვალოთ მუდმივად და გავაწარმოოთ მოცემული ფუნქცია x ცვლადით. გამოვიყენოთ რთული ფუნქციის გაწარმოების წესი. $\frac{\partial z}{\partial x} = 5(3x + 2y)^4 \frac{\partial}{\partial x}(3x + 2y) = 15(3x + 2y)^4$.
შესაბამისად ვიქცევით y ცვლადით გაწარმოების შემთხვევაშიც:
$\frac{\partial z}{\partial y} = 5(3x + 2y)^4 \frac{\partial}{\partial y}(3x + 2y) = 10(3x + 2y)^4$.
პასუხი: $\frac{\partial z}{\partial x} = 15(3x + 2y)^4$; $\frac{\partial z}{\partial y} = 10(3x + 2y)^4$.

1-ზ) $f(s,t) = \frac{3t}{2s}$

ამოხსნა: ფუნქცია გადავწეროთ შემდეგი სახით: $f(s,t) = \frac{3}{2}ts^{-1}$.

f_s -ის საპოვნელად t ჩავთვალოთ მუდმივად და გამოვიყენოთ ხარისხოვანი ფუნქციის გაწარმოების ფორმულა.

$f_s(s,t) = \frac{3}{2}t(-1)s^{-2} = -\frac{3t}{2s^2}$, ხოლო $f_t(s,t) = \frac{3}{2}s^{-1}$.

პასუხი: $f_s(s,t) = -\frac{3t}{2s^2}$; $f_t(s,t) = \frac{3}{2s}$.

1-ი) $f(x,y) = \frac{e^{2-x}}{y^2}$

ამოხსნა: გადავწეროთ ფუნქცია შემდეგი სახით $f(x,y) = e^{2-x}y^{-2}$. გამოვიყენოთ მაჩვენებლიანი და ხარისხოვანი ფუნქციების გაწარმოების ფორმულები და ასევე რთული ფუნქციის გაწარმოების წესი, გვექნება

$f_x(x,y) = e^{2-x}(-1)y^{-2} = -\frac{e^{2-x}}{y^2}$.

$f_y(x,y) = e^{2-x}(-2)y^{-3} = -\frac{2e^{2-x}}{y^3}$.

პასუხი: $f_x(x,y) = -\frac{e^{2-x}}{y^2}$; $f_y(x,y) = -\frac{2e^{2-x}}{y^3}$.

2. **გამოთვალეთ მოცემული ფუნქციების პირველი რიგის კერძო წარმოებულები მითითებულ $P_0(x_0, y_0)$ წერტილში:**

2-ა) $f(x,y) = x^2 + 3y$, $P_0(1,-1)$

ამოხსნა: ვიპოვოთ $f_x(x,y)$ და $f_y(x,y)$, ხოლო შემდეგ x და y ცვლადებს მივანიჭოთ მოცემული მნიშვნელობები.

$f_x(x,y) = 2x$, $f_x(1,-1) = 2$.

$f_y(x,y) = 3$, $f_y(1,-1) = 3$.

პასუხი: $f_x(1,-1) = 2$, $f_y(1,-1) = 3$.

2-გ) $f(x,y) = \frac{y}{2x+y}$; $P_0(0,-1)$

ამოხსნა: გამოვიყენოთ განაყოფის გაწარმოების წესი, გვექნება

$f_x(x,y) = -\frac{2y}{(2x+y)^2}$; $f_x(0,-1) = 2$.

$f_y(x,y) = \frac{(2x+y)-y}{(2x+y)^2} = \frac{2x}{(2x+y)^2}$; $f_y(0,-1) = 0$

პასუხი: $f_x(0,-1) = 2$; $f_y(0,-1) = 0$.

3. **იპოვეთ მოცემული ფუნქციების ყველა სახის მეორე რიგის კერძო წარმოებულები:**

3-ა) $f(x,y) = 5x^4y^3 + 2xy$

ამოხსნა: იმისათვის, რომ ვიპოვოთ მეორე რიგის $f_{xx}(x,y)$, $f_{xy}(x,y)$ და $f_{yy}(x,y)$ კერძო წარმოებულები, ჯერ ვიპოვოთ $f_x(x,y)$ და $f_y(x,y)$. გვექნება $f_x(x,y) = 20x^3y^3 + 2y$ და $f_y(x,y) = 15x^4y^2 + 2x$. მეორე რიგის კერძო წარმოებულების მისაღებად შედეგები ხელმეორედ გავაწარმოოთ შესაბამისი ცვლადებით.

$f_x(x,y)$ გავაწარმოოთ x ცვლადით, მივიღებთ $f_{xx}(x,y) = 60x^2y^3$.

$f_x(x,y)$ გავაწარმოოთ y ცვლადით, გვექნება $f_{xy}(x,y) = 60x^3y^2 + 2$.

დაგვრჩა $f_y(x,y)$ - ის გაწარმოება y ცვლადით, ვღებულობთ $f_{yy}(x,y) = 30x^4y$.
პასუხი: $f_{xx}(x,y) = 60x^2y^3$; $f_{xy}(x,y) = 60x^3y^2 + 2$; $f_{yy}(x,y) = 30x^4y$.

3-გ) $f(x,y) = e^{x^2y}$
ამოხსნა: ჯერ ვიპოვოთ $f_x(x,y)$ და $f_y(x,y)$. ამისათვის გამოვიყენოთ მაჩვენებლიანი ფუნქციისა და რთული ფუნქციის გაწარმოების წესები , გვექნება $f_x(x,y) = 2xye^{x^2y}$, $f_y(x,y) = x^2e^{x^2y}$.
$f_{xx}(x,y)$ -ის საპოვნელად $f_x(x,y)$ ხელმეორედ გავაწარმოოთ x -ით, გამოვიყენოთ ნამრავლის გაწარმოების წესი, გვექნება
$f_{xx}(x,y) = 2ye^{x^2y} + 2xy2xye^{x^2y} = 2ye^{x^2y}(1 + 2x^2y)$.
ასევე, $f_{xy}(x,y)$ -ის საპოვნელად $f_x(x,y)$ გავაწარმოოთ y ცვლადით (შენიშვნა: შეგვიძლია $f_y(x,y)$ გავაწარმოოთ x ცვლადით)
$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 2xe^{x^2y} + 2xye^{x^2y}x^2 = 2xe^{x^2y}(1 + x^2y)$.
დაგვრჩა $f_y(x,y)$ -ის გაწარმოება y -ით. $f_{yy}(x,y) = x^4e^{x^2y}$.
პასუხი: $f_{xx}(x,y) = 2ye^{x^2y}(1 + 2x^2y)$;
$f_{xy}(x,y) = 2xe^{x^2y}(1 + x^2y)$;
$f_{yy}(x,y) = x^4e^{x^2y}$.

4.
მეწარმემ დაადგინა, რომ ქარხანაში ყოველწლიურად გამოშვებული პროდუქციის რაოდენობა გამოისახება ქობ-დაგლასის შემდეგი ფუნქციით: $Q(K,L) = 30K^{0.3}L^{0.7}$,
სადაც Kარის დახარჯული კაპიტალის რაოდენობა (ათას ერთეულებში), ხოლო L -დახარჯული სამუშაო დროის რაოდენობა (საათებში).
ა) იპოვეთ კაპიტალის მარგინალური მწარმოებლურობა $Q_K(K,L)$, თუ კაპიტალური დანახარჯები შეადგენს 630 000 ლარს. ხოლო შრომის დონე კი 830 საათს.
ბ) წარმოების მიმდინარე დონის უფრო სწრაფად გასაზრდელად კაპიტალის ერთეულის დამატება სჯობს, თუ სამუშაო დროის ერთეულით გაზრდა?
ამოხსნა.
ა) კაპიტალის მარგინალური მწარმოებლურობის $Q_K(K,L)$-ის გამოსათვლელად, გავაწარმოოთ $30K^{0.3}L^{0.7}$ ფუნქცია K ცვლადით, შემდეგ კი გამოვთვალოთ მიღებული ფუნქციის მნიშვნელობა, როცა K= 630 და L= 830. გვექნება
$(30K^{0.3}L^{0.7})_K = 30 \cdot 0.3 \cdot K^{-0.7}L^{0.7}$= 9$\cdot$ $630^{-0.7} \cdot 830^{0.7} \approx 10.92$ მივიღეთ, რომ კაპიტალის ერთი ერთეულით (ათასი ლარით) გაზრდის შემთხვევაში გამოშვებული პროდუქციის რაოდენობა გაიზრდება 10.92 ერთეულით.
პასუხი: კაპიტალის მარგინალური მწარმოებლურობა 10.92 ერთეულის ტოლია.
ბ) ჯერ გავიგოთ, თუ რამდენი ერთეულით გაიზრდება გამოშვებული პროდუქციის რაოდენობა, სამუშაო დროის ერთი საათით გაზრდის შემთხვევაში. ამისათვის ვიპოვოთ სამუშაო დროის მარგინალური მწარმოებლურობა ანუ $Q_L(630{,}830)$ სიდიდე.
გვექნება $Q_L(K,L)$= $30 \cdot 0.7 \cdot K^{0.3}L^{-0.3}$= 21$\cdot$ $K^{0.3}L^{-0.3}$.
ამიტომ $Q_L(630{,}830) = 21 \cdot 630^{0.3} \cdot 830^{-0.3} \approx 19.31$
მივიღეთ, რომ სამუშაო დროის ერთი საათით გაზრდის შემთხვევაში გამოშვებული პროდუქციის რაოდენობა 19.31 ერთეულით გაიზრდება.
პასუხი: წარმოების მიმდინარე დონის უფრო სწრაფად გასაზრდელად კაპიტალის ერთეულის დამატებაზე უკეთესი იქნება, თუ სამუშაო დროს ერთი ერთეულით გავზრდით, რადგან პირველ შემთხვევაში გამოშვებული პროდუქციის რაოდენობა 10.92 ერთეულით გაიზრდება. მეორე შემთხვევაში კი 19.31 ერთეულით.

7.
იპოვეთ მოცემული ფუნქციის კრიტიკული წერტილები და მოახდინეთ მათი კლასიფიკაცია;

7 -ა. $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - xy + 14y$;

ამოხსნა. ვინაიდან

$$f_x = 2x - y \quad \text{და} \quad f_y = 4y - x + 14,$$

ამიტომ კრიტიკულ წერტილებს ვიპოვით შემდეგი სისტემის ამოხსნით:

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 4y - x + 14 = 0 \end{cases}$$

სისტემის პირველი განტოლებიდან მივიღებთ $y = 2x$; თუ ამას ჩავსვამთ მეორე განტოლებაში გვექნება $x = -2$; საიდანაც მივიღებთ $y = -4$.

მაშასადამე, ფუნქციას გააჩნია ერთი კრიტიკული წერტილი (-2, -4).

კლასიფიკაციისთვის ვიპოვოთ მეორე წარმოებულები, ანუ f_{xx} , f_{xy} და f_{yy} ფუნქციები. მივიღებთ:

$$f_{xx} = 2 \ , f_{xy} = -1, f_{yy} = 4.$$

ცხადია, ეს მუდმივი ფუნქციებია და ამ ფუნქციების მნიშვნელობები (-2, -4) წერტილშიც შესაბამისად 2-ის, -1-ის და 4-ის ტოლი იქნება. ამის შემდეგ განვიხილოთ ფუნქცია

$$D(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - (f_{xy}(x, y))^2$$

და გამოვთვალოთ მისი მნიშვნელობა (-2, -4) წერტილში. მივიღებთ:

$$D(-2, -4) = f_{xx}(-2, -4) \cdot f_{yy}(-2, -4) - (f_{xy}(-2, -4))^2 = 2 \cdot 4 - (-1) = 9 > 0.$$

ანუ D(-2, -4) მნიშვნელობა დადებითია. ეს იმას ნიშნავს, რომ (-2, -4) წერტილი f(x, y) ფუნქციის ესტრემუმის წერტილია. რადგან ამასთან ერთად მართებულია უტოლობა

$$f_{xx}(-2, -4) = 2, \text{ ე.ი. } f_{xx}(-2, -4) > 0,$$

ამიტომ (-2, -4) წერტილი ყოფილა f(x, y) ფუნქციის მინიმუმის წერტილი.

დასასრულს გამოვთვალოთ ამ მინიმუმის წერტილზე საწყისი ფუნქციის მნიშვნელობა, მივიღებთ:

$$f_{min}(-2, -4) = f(-2, -4) = (-2)^2 + 2(-4)^2 - (-2)(-4) + 14(-4) = -28$$

პასუხი:

მოცემულ ფუნქციას აქვს ერთი კრიტიკული წერტილი (-2, -4), ის მინიმუმის წერტილია და $f_{min} = -28$.

7 -გ. $f(x, y) = x\,y + \frac{8}{x} + \frac{8}{y}$

ამოხსნა. ვინაიდან

$$f_x = y - \frac{8}{x^2} \quad \text{და} \quad f_y = x - \frac{8}{y^2},$$

ამიტომ კრიტიკულ წერტილებს ვიპოვით შემდეგი სისტემის ამოხსნით:

$$\begin{cases} y - \dfrac{8}{x^2} = 0 \\ x - \dfrac{8}{y^2} = 0 \end{cases}$$

სისტემის პირველი განტოლებიდან მივიღებთ $y = \frac{8}{x^2}$; თუ ამას ჩავსვამთ მეორე განტოლებაში გვექნება $x = \frac{x^4}{8}$; საიდანაც მივიღებთ $x_1 = 0$, $x_2 = 2$. შესაბამისად გვექნება $y_1 =$ არ არსებობს, $y_2 = 2$.

მაშასადამე, ფუნქციას გააჩნია ერთი კრიტიკული წერტილი (2 , 2).

კლასიფიკაციისთვის ვიპოვოთ მეორე წარმოებულები, ანუ f_{xx} , f_{xy} და f_{yy} ფუნქციები.

$$f_{xx} = \left(y - \frac{8}{x^2}\right)'_x = \frac{16}{x^3}$$

$$f_{xy} = \left(y - \frac{8}{x^2}\right)'_y = 1$$

$$f_{yy} = \left(x - \frac{8}{y^2}\right)'_y = \frac{16}{y^3}$$

ამის შემდეგ განვიხილოთ ფუნქცია

$$D(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - (f_{xy}(x, y))^2$$

და გამოვთვალოთ მისი მნიშვნელობა (2, 2) წერტილში. მივიღებთ:

$$D(2, 2) = f_{xx}(2, 2) \cdot f_{yy}(2,2) - (f_{xy}(2,2))^2 = 2 \cdot 2 - 1 = 3 > 0.$$

ანუ D(2,2) მნიშვნელობა დადებითია. ეს იმას ნიშნავს, რომ (2, 2) წერტილი f(x, y) ფუნქციის ექსტრემუმის წერტილია.
რადგან ამასთან ერთად მართებულია უტოლობა $f_{xx}(2, 2) > 0$,
ამიტომ (2, 2) წერტილი ყოფილა f(x, y) ფუნქციის მინიმუმის წერტილი.
დასასრულს გამოვთვალოთ ამ მინიმუმის წერტილზე საწყისი ფუნქციის მნიშვნელობა, მივიღებთ:

$$f_{min}(2, 2) = f(2, 2) = \mathbf{2 \cdot 2 + \frac{8}{2} + \frac{8}{2} = 12}$$

პასუხი:
მოცემულ ფუნქციას აქვს ერთი კრიტიკული წერტილი (2,2), ის მინიმუმის წერტილია და $f_{min} = 12$.

7 - ე. $f(x, y) = (x - 1)^2 + y^3 - 3y^2 - 9y + 5;$
ამოხსნა. ვინაიდან

$$f_x = 2(x - 1) \quad \text{და} \quad f_y = 3y^2 - 6y - 9,$$

ამიტომ კრიტიკულ წერტილებს ვიპოვით შემდეგი სისტემის ამოხსნით:

$$\begin{cases} 2(x - 1) = 0 \\ 3y^2 - 6y - 9 = 0 \end{cases}$$

ამ სისტემის ამოხსნით მივიღებთ ორ ამონახსნს ესენია (1,3) და (1,-1).
მაშასადამე, ფუნქციას გააჩნია ორი კრიტიკული წერტილი (1,3) და (1,-1).
კლასიფიკაციისთვის ვიპოვოთ მეორე წარმოებულები, ანუ f_{xx}, f_{xy} და f_{yy} ფუნქციები. მივიღებთ:

$$f_{xx} = 2,\ f_{xy} = 0,\ f_{yy} = 6y - 6.$$

გამოვიკვლიოთ ცალ-ცალკე თითოეული კრიტიკული წერტილი.

I. **(1 , 3)- წერტილის გამოკვლევა.**

განვიხილოთ ფუნქცია

$$D(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - (f_{xy}(x, y))^2$$

და გამოვთვალოთ მისი მნიშვნელობა (1,3) წერტილში. მივიღებთ:

$$D(\mathbf{1, 3}) = f_{xx}(\mathbf{1, 3}) \cdot f_{yy}(\mathbf{1, 3}) - (f_{xy}(\mathbf{1, 3}))^2 = 2 \cdot 12 - 0 = 24 > 0.$$

ანუ D(**1 , 3**) მნიშვნელობა დადებითია. ეს იმას ნიშნავს, რომ **(1 , 3)** წერტილი f(x, y) ფუნქციის ესტრემუმის წერტილია. რადგან ამასთან ერთად მართებულია უტოლობა

$$f_{xx}(\mathbf{1, 3}) = 2, \text{ ე.ი. } f_{xx}(\mathbf{1, 3}) > 0,$$

ამიტომ **(1 , 3)** წერტილი ყოფილა f(x, y) ფუნქციის მინიმუმის წერტილი.
დასასრულს
გამოვთვალოთ ამ მინიმუმის წერტილზე ფუნქციის მნიშვნელობა, მივიღებთ:

$$f_{min}(\mathbf{1, 3}) = f(\mathbf{1, 3}) = -22$$

II. **(1 ,-1)- წერტილის გამოკვლევა.**

განვიხილოთ ფუნქცია

$$D(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - (f_{xy}(x, y))^2$$

და გამოვთვალოთ მისი მნიშვნელობა (1,-1) წერტილში. მივიღებთ:

$$D(\mathbf{1, -1}) = f_{xx}(\mathbf{1, -1}) \cdot f_{yy}(\mathbf{1, -1}) - (f_{xy}(\mathbf{1, -1}))^2 = 2 \cdot (-12) - 0 = -24 < 0.$$

ანუ D(**1 , -1**) მნიშვნელობა უარყოფითია. ეს იმას ნიშნავს, რომ **(1 , -1) კრიტიკული** წერტილი არ არის f(x, y) ფუნქციის ექსტრემუმის წერტილი.
პასუხი:
მოცემულ ფუნქციას აქვს ერთი კრიტიკული წერტილი (1, 3), ის მინიმუმის წერტილია და $f_{min} = -22$.

7 - ზ. $f(x, y) = -x^4 - 32x + y^3 - 12y + 7;$

ამოხსნა. ვინაიდან

$$f_x = -4x^3 - 32 \quad \text{და} \quad f_y = 3y^2 - 12,$$

ამიტომ კრიტიკულ წერტილებს ვიპოვით შემდეგი სისტემის ამოხსნით:

$$\begin{cases} -4x^3 - 32 = 0 \\ 3y^2 - 12 = 0 \end{cases}$$

ამ სისტემის ამოხსნით მივიღებთ ორ ამონახსნს ესენია (-2, 2) და (-2,-2).

მაშასადამე, ფუნქციას გააჩნია ორი კრიტიკული წერტილი (-2, 2) და (-2,-2).

კლასიფიკაციისთვის ვიპოვოთ მეორე წარმოებულები, ანუ f_{xx} , f_{xy} და f_{yy} ფუნქციები. მივიღებთ:

$$f_{xx} = -12x^2,\ f_{xy} = 0,\ f_{yy} = 6y.$$

გამოვიკვლიოთ ცალ-ცალკე თითოეული კრიტიკული წერტილი.

I. **(-2, 2) - წერტილის გამოკვლევა.**

განვიხილოთ ფუნქცია

$$D(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - (f_{xy}(x, y))^2$$

და გამოვთვალოთ მისი მნიშვნელობა **(-2, -2)** წერტილში. მივიღებთ:

$$D(\mathbf{-2, -2}) = f_{xx}(\mathbf{-2, -2}) \cdot f_{yy}(\mathbf{-2, -2}) - (f_{xy}(\mathbf{-2, -2}))^2 = (-48) \cdot (-12) - 0 < 0.$$

ანუ D**(-2, 2)** მნიშვნელობა უარყოფითია. ეს იმას ნიშნავს, რომ **(-2 , 2) კრიტიკული** წერტილი არ არის f(x, y) ფუნქციის ესტრემუმის წერტილი.

II. **(-2 ,-2)- წერტილის გამოკვლევა.**

განვიხილოთ ფუნქცია

$$D(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - (f_{xy}(x, y))^2$$

და გამოვთვალოთ მისი მნიშვნელობა (-2,-2) წერტილში. მივიღებთ:

$$D(\mathbf{-2, -2}) = f_{xx}(\mathbf{-2, -2}) \cdot f_{yy}(\mathbf{-2, -2}) - (f_{xy}(\mathbf{-2, -2}))^2 = (-48)\cdot(-12) - 0 > 0.$$

ანუ D**(-2, -2)** მნიშვნელობა დადებითია. ეს იმას ნიშნავს, რომ **(-2,-2)** წერტილი f(x, y) ფუნქციის ექსტრემუმის წერტილია. რადგან ამასთან ერთად მართებულია უტოლობა

$$f_{xx}(\mathbf{-2,-2}) = -48, \text{ ე.ი. } f_{xx}(\mathbf{1, 3}) < 0,$$

ამიტომ **(-2,-2)** წერტილი ყოფილა f(x, y) ფუნქციის მაქსიმუმის წერტილი.

დასასრულს

გამოვთვალოთ ამ წერტილზე ფუნქციის მნიშვნელობა, მივიღებთ:

$$f_{max} = f(\mathbf{-2,-2}) = -(-2)^4 - 32(-2) + (-2)^3 - 12(-2) + 7 = 71$$

პასუხი:

მოცემულ ფუნქციას აქვს ერთი კრიტიკული წერტილი (-2,-2), ის მაქსიმუმის წერტილია და f_{max} = 71.

8 .

კომპანია აწარმოებს A საქონლის x ერთეულს და B საქონლის y ერთეულს. A საქონლის თითოეული ერთეული შეიძლება გაიყიდოს $p = 100 - x$ ლარად, ხოლო B საქონლის თითოეული ერთეული შეიძლება გაიყიდოს $q = 100 - y$ ლარად. ამ ერთეულების დანახარჯები გამოისახება ერთობლივი დანახარჯების შემდეგი ფორმულის საშუალებით:

$$C(x, y) = x^2 + xy + y^2$$

დაადგინეთ x და y-ის რა მნიშვნელობები უზრუნველყოფენ მაქსიმალურ მოგებას.

ამოხსნა. ამოცანის პირობების მიხედვით შევადგინოთ მოგების ფუნქცია $P(x, y)$. ცხადია, რომ A ტიპის პროდუქციის x ერთეულის გაყიდვითა და B ტიპის პროდუქციის y ერთეულის გაყიდვით მიღებული მთლიანი ამონაგები ტოლი იქნება

$R(x, y) = x(100 - x) + y(100 - y)$ ლარის. რადგან მთლიანი დანახარჯი $C(x, y) = x^2 + xy + y^2$ ლარის ტოლია, ამიტომ მოგებას გამოსახავს ორი ცვლადის შემდეგი ფუნქცია:

$P(x, y) = x(100 - x) + y(100 - y) - (x^2 + xy + y^2)$, ანუ რაც იგივეა,

$$P(x, y) = 100x + 100y - 2x^2 - xy - 2y^2 \text{ ფუნქცია.}$$

გამოვიკვლიოთ ეს ფუნქცია ექსტრემუმზე.

ვინაიდან

$$f_x = -4x - y + 100 \quad \text{და} \quad f_y = -4y - x + 100$$

ამიტომ კრიტიკულ წერტილებს ვიპოვით შემდეგი სისტემის ამოხსნით:

$$\begin{cases} -4x - y + 100 = 0 \\ -4y - x + 100 = 0 \end{cases}$$

სისტემის პირველი განტოლებიდან მივიღებთ $y = 100 - 4x$; თუ ამას ჩავსვამთ მეორე განტოლებაში მივიღებთ $x = 20$. საიდანაც გამოვა, რომ $y = 100 - 80$=20

მაშასადამე, ფუნქციას გააჩნია ერთი კრიტიკული წერტილი (20, 20).

კლასიფიკაციისთვის ვიპოვოთ მეორე წარმოებულები, ანუ f_{xx} , f_{xy} და f_{yy} ფუნქციები. მივიღებთ:

$$f_{xx} = -4, \quad f_{xy} = -1, \quad f_{yy} = -4$$

განვიხილოთ ფუნქცია

$$D(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{xy}(x, y) - (f_{yy}(x, y))^2$$

და გამოვთვალოთ მისი მნიშვნელობა (20, 20) წერტილში. მივიღებთ:

$$\text{D(20, 20)=}\ f_{xx}(20{,}20) \cdot f_{xy}(20{,}20) - \left(f_{yy}(20{,}20)\right)^2 = (-4) \cdot (-4) - (-1)^2 = 15 > 0.$$

ანუ D(20,20) მნიშვნელობა დადებითია. ეს იმას ნიშნავს, რომ (20,20) წერტილი $f(x, y)$ ფუნქციის ექსტრემუმის წერტილია. რადგან ამასთან ერთად მართებულია უტოლობა

$$f_{xx}(20{,}20) < 0$$

ამიტომ (20,20) წერტილი $f(x, y)$ ფუნქციის მაქსიმუმის წერტილი ყოფილა.

დასასრულს გამოვთვალოთ ამ წერტილზე საწყისი ფუნქციის მნიშვნელობა, მივიღებთ:

$$f_{max} = f(20{,}20) = 2000 + 2000 - 800 - 400 - 800 = 2000$$

პასუხი:

ამოცანის პირობებში მაქსიმალური მოგება მაშინ იქნება, თუკი ვაწარმოებთ A ტიპის 20 და B ტიპის 20 რაოდენობის პროდუქციას. ხოლო მაქსიმალური მოგება ამ შემთხვევაში 2000 ლარის ტოლი იქნება.